Concours National Commun - Session 2010

Corrigé de l'épreuve de mathématiques I
Filière MP

Étude de l'équation de la chaleur

Corrigé par M.TARQI

I. Résultats préliminaires

1.1 Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$, alors, d'après le théorème de Schwarz on peut écrire, pour tout $x \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x),$$

donc H_x est une matrice symétrique, et comme elle est réelle, alors H_x est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

1.2

1.2.1 f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$ et admet un maximum en a, donc d'après la condition nécessaire des extremums $df(a) = 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.
Par ailleurs, puisque $\mathcal{U}$ est un ouvert, alors il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset \mathcal{U}$, donc pour tout $|h| < \eta$, $a + h \in \mathcal{U}$ et d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2) = \frac{1}{2} Q_a(h) + o(\|h\|^2).$$

1.2.2

1.2.2.1 Soit $h = t\dfrac{u}{\|u\|}$, alors $|t| \le \eta$, alors

$$f\left(a + t\frac{u}{\|u\|}\right) - f(a) = \frac{t^2}{2\|u\|^2} Q_a(u) + o(t^2) \le 0,$$

ainsi pour t voisin de 0, on a :

$$t^2 Q_a(u) + o(t^2) \le 0.$$

1.2.2.2 L'inégalité précédente s'écrit aussi pour tout $t \in]-\eta, \eta[\setminus\{0\}$:

$$Q_a(u) + \varepsilon(t) \le 0,$$

où $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$, donc quand t tend vers 0, on obtient $Q_a(u) \le 0$, donc Q_a est négative.

1.2.3 Comme Q_a est négative, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = (H_a(e_i)|e_i) = Q_a(e_i) \le 0.$$

Où $(e_1, e_2, ..., e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(.|.)$ le produit scalaire canonique.
En particulier

$$\triangle f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \le 0.$$

1.3 **Applications aux fonctions harmoniques**

1.3.1 f est une fonction continue sur la partie compacte K, donc elle bornée et atteint ses bornes.

1.3.2 Supposons que f atteint son maximum en un point a de l'intérieur de K, alors d'après ce qui précède (question [1.2]), $\triangle f(a) \leq 0$, ce qui est absurde puisque $\triangle(f) > 0$.
Donc f atteint son maximum sur la frontière de K, c'est-à-dire :

$$\sup_{\|x\|\leq 1} f(x) = \sup_{\|y\|=1} f(y).$$

1.3.3

1.3.3.1 Pour tout $x \in K$, $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$, donc f_ε apparaît comme somme de deux fonctions de $\mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(K)$, alors $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(K)$ et $\forall x \in \mathcal{U}$,

$$\triangle f_\varepsilon(x) = \triangle f(x) + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon.$$

1.3.3.2 Soit $a \in \mathbb{K}$ tel que $f_\varepsilon(a) = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} f_\varepsilon(x)$ et comme $\triangle f_\varepsilon > 0$, alors

$$f_\varepsilon(a) = \sup_{\|x\|\leq 1} f_\varepsilon(x) = \sup_{\|y\|=1} f_\varepsilon(y) = \varepsilon + \sup_{\|y\|=1} f(y)$$

Donc pour tout $x \in K$,

$$f(x) + \varepsilon\|x\|^2 \leq f_\varepsilon(a) = \varepsilon + \sup_{\|y\|=1} f(y)$$

et quand ε tend vers 0, on obtient :

$$f(x) \leq \sup_{\|y\|=1} f(y).$$

1.3.3.3 On a $\triangle f = \triangle(-f)$, donc si f est harmonique, alors $-f$ est aussi harmonique et on aura dans ce cas

$$-f(x) \leq \sup_{\|y\|=1} (-f)(y) = -\inf_{\|y\|=1} f(y).$$

ou encore

$$\inf_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x).$$

II. Construction d'une solution du problème

2.1 Si $x \in [-\pi, 0]$, alors $-x \in [0, \pi]$ et donc $\widetilde{\psi}(x) = -\widetilde{\psi}(-x) = -\psi(-x)$; si $x \in [\pi, 2\pi]$, alors $x - 2\pi \in [-\pi, 0]$ et donc $\widetilde{\psi}(x) = \widetilde{\psi}(x - 2\pi) = -\psi(2\pi - x)$ et enfin si $x \in [2\pi, 3\pi]$, alors $x - 2\pi \in [0, \pi]$ et par conséquent $\widetilde{\psi}(x) = \psi(x - 2\pi)$.
La fonction $\widetilde{\psi}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, et

$$\lim_{t\to 0^+} \widetilde{\psi}'(t) = \lim_{t\to 0^+} \psi'(t) = \psi'(0)$$

et

$$\lim_{t\to 0^-} \widetilde{\psi}'(t) = \lim_{t\to 0^-} \frac{d}{dt}(-\psi(-t)) = \psi'(0).$$

De même on montre que $\widetilde{\varphi}'$ est continue en $-\pi$, ainsi $\widetilde{\psi}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.2 On a $b_p(\widetilde{\psi}) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{\psi}(t)\sin(pt)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\widetilde{\psi}(t)\sin(pt)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\sin(pt)dt = 2b_p$. Puisque ψ est impaire, $a_p(\widetilde{\psi}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2.3 Puisque ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème de la convergence normale, la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}|b_p(\widetilde{\psi}|)$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} b_p$ est absolument convergente.

2.4 On a $|v_p(x,t)| \leq |b_p|$, donc la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} v_p$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$. Par ailleurs, les application $(x,t) \longmapsto b_p\sin(px)e^{-p^2t}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, donc la fonction $(x,t) \longmapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} v_p(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

2.5 Soit $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_p est produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} - \frac{\partial v_p}{\partial t} = -p^2 b_p \sin(px)e^{-p^2t} + p^2 b_p \sin(px)e^{-p^2t} = 0.$$

2.6 On a pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[a,+\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|p^k v_p(x,t)| \leq b_p p^k e^{-p^2a}$ et comme $\displaystyle\lim_{p\to\infty} p^k e^{-p^2a} = 0$, alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, on a $p^k e^{-p^2a} \leq 1$ et par conséquent pour tout $p \geq p_0$, $|p^k v_p(x,t)| \leq |b_p|$, donc la série $\sum_{p\geq 1} p^k v_p$ converge normalement sur $R\times[a,+\infty[$.
On a $p^k \dfrac{\partial v_p}{\partial x}(x,t) = p^{k+1}\cos(px)e^{-p^2t}$, donc le même raisonnement se fait pour montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} p^k \frac{\partial v_p}{\partial x}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}\times[a,+\infty[$.

2.7 Soit $a > 0$ et $t \in [a,+\infty[$. Posons $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} v_p(x,t)$. Montrons que φ possède en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} pb_p\cos(px)e^{-pt^2}$

- φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- $u_p : x \longmapsto v_p(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \geq 1$ et $u_p'(x) = pb_p\cos(px)e^{-p^2t}$.
- D'après la question [2.6], la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} u_p'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : De ces points, on en déduit par un théorème de cours que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\varphi'(x) = \sum_{p=1}^{\infty} u_p'(x).$$

Autrement dit, la fonction f possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} pb_p\cos(px)e^{-p^2t}.$$

Par ailleurs, les applications $(x,t) \longmapsto pb_p\cos(px)e^{-p^2t}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et comme la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} pb_p\cos(px)e^{-p^2t}$ converge normalement sur tout $\mathbb{R}\times[a,+\infty[$, pour $a > 0$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

2.8 Posons $\varphi(t)=\sum_{p=1}^{\infty}v_p(x,t)$. Montrons que φ possède en tout point de $]0,+\infty[$ une dérivée et que $\forall t\in]0,+\infty[$, $\varphi'(t)=-\sum_{p=1}^{\infty}p^2b_p\sin(px)e^{-pt^2}$

- φ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
- $u_p : t\longmapsto v_p(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ pour tout $p\geq 1$ et $u_p'(t)=-p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}$.
- La série $\sum_{p\geq 1}u_p'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.

Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que

$$\varphi'(t)=\sum_{p=1}^{\infty}u_p'(t).$$

Autrement dit, la fonction f possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à t et que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=-\sum_{p=1}^{\infty}p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}.$$

D'autre part, les applications $(x,t)\longmapsto p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et comme la série $\sum_{p\geq 1}p^2b_p\sin(px)e^{-p^2t}$ converge normalement sur tout $\mathbb{R}\times[a,+\infty[$, pour $a>0$, alors $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

2.9 Il suffit de montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 existent et qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. D'après les questions [2.7] et [2.8] f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et on peut utiliser le même raisonnement pour montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}$ existent et qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=-\sum_{p=1}^{\infty}p^2\sin(px)e^{-p^2t}$$

pour tout (x,t) de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
Ainsi $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=-\sum_{p=1}^{\infty}p^2\sin(px)e^{-p^2t}-(-\sum_{p=1}^{\infty}p^2\sin(px)e^{-p^2t})=0$$

2.10 D'après ce qui précède, $f : (x,t)\longmapsto\sum_{p=1}^{\infty}v_p(x,t)$ vérifie la condition (i) de (1). D'autre part, pour tout $t\in[0,R]$, $f(0,t)=f(\pi,t)=0$; donc la deuxième condition est aussi vérifie, enfin, pour tout x de $[0,\pi]$, $f(x,0)=\sum_{p=1}^{\infty}b_p\sin(px)=\widetilde{\varphi}(x)=\psi(x)$.

En conclusion, la restriction de f à $\overline{\Omega}$ est solution du problème (1).

III. Unicité de la solution

3.1 **Un résultat utile**

3.1.1 Par définition $g'(b)=\lim_{t\to b^-}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}$ et comme $g(t)-g(b)\leq 0$ pour tout $t\in]a,b]$, alors $g'(b)\geq 0$.

3.1.2 Il existe un intervalle ouvert $I_\alpha =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset]a,b[$ tel que $\forall x \in I_\alpha,\ g(x) \geq g(x_0)$, alors

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0^+} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

et comme g est dérivable en x_0 alors

$$g'(x_0) = g'_d(x_0) = g'_g(x_0) = 0$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 s'écrit sous la forme :

$$g(x_0+h) - g(x_0) = \frac{h^2}{2} g''(x_0) + o(h^2).$$

Comme dans la question [1.2] de la première partie, $g''(x_0) \leq 0$.

3.2

3.2.1 f est une fonction continue sur $\overline{\Omega}_r$, qui est un compact de $\mathbb{R}^2$; donc f est bornée et atteint ses bornes ; en particulier il existe $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega}_r$ tel que

$$F(x_0,t_0) = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega_r}} F(x,t).$$

3.2.2 Si $(x_0,t_0) \in \Omega_r$, qui est ouvert et puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur Ω_r, alors d'après la condition nécessaire des extremums,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) = 0.$$

La fonction $x \longmapsto F(x,t_0)$ est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ et admet un maximum en x_0, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$ (la question [3.1.2] de cette partie).

3.2.3 La fonction $g : x \longmapsto F(x,r) = F(x,t_0)$ est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ et admet un maximum en x_0, donc $g''(x_0) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$.
De même , la fonction $t \longmapsto F(x_0,t)$ est deux fois dérivable sur $]0,r]$ et admet un maximum en $t_0 = r$, donc

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,r) \geq 0.$$

3.2.4 Si $(x_0,t_0) \in \Omega_r$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$, mais ceci est absurde.
Si $(x_0,t_0) \in \Lambda_r$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,t_0) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) \leq 0$, et ceci aussi est absurde.
Donc la condition $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial f}{\partial t} > 0$ implique que $(x_0,t_0) \in \Gamma_r$.

3.3

3.3.1 Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_{r_p} \subset \Gamma_R$, alors la suite $(z_p)_{p\geq 1}$ d'éléments de Γ_R est bornée, et d'après le théorème de Weirstrass, on peut extraire une sous-suite $(z_{\sigma(p)})_{p\geq 1}$ qui converge dans Γ_R vers un élément $z = (x^*,t^*)$.
D'autre part, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\Omega_{r_p} \subset \Omega_{r_{p+1}}$, donc $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega_p} F(x,t) \leq \sup\limits_{(x,t)\in\Omega_{p+1}} F(x,t)$ et par conséquent $F(z_p) \leq F(z_{p+1})$, donc $(F(z_p))_{p\geq 1}$ est croissante, il est de même de la sous-suite $(F(z_\sigma(p)))_{p\geq 1}$.
On a aussi F est continue sur Γ_R et $\lim\limits_{p\to\infty} z_{\sigma(p)} = z$, donc $F(z_{\sigma(p)})_{p\geq 1}$ tend vers $F(z)$.

3.3.2 Soit $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,R[$, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x,t) \in \overline{\Omega}_{\sigma(p)}$ et donc

$$F(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_{\sigma(p)}} F(x,t) = F(x_{\sigma(p)}, t_{\sigma(p)})$$

et par conséquent $F(x,t) \leq \lim_{p\to\infty} F(x_{\sigma(p)}, t_{\sigma(p)}) = F(x^*,t^*)$; et comme F est continue sur $\overline{\Omega}_R$, alors,

$$F(x,R) = \lim_{t\to R} F(x,t) \leq F(x^*,t^*).$$

Donc l'inégalité précédente est vraie pour tout $(x,t) \in \overline{\Omega}_R$.

3.4

3.4.1 Il est clair que $F_p \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_R) \cap \mathcal{C}^2(\Omega_R)$ et que $\forall (x,t) \in \Omega_R$,

$$\frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial F_p}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \frac{2}{p} > 0.$$

3.4.2 D'après la question [3.3] de cette partie, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_p,t_p) \in \Omega_p$ tel que

$$F_p(x_p,t_p) = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F_p(x,t).$$

3.4.3 $(x_p,t_p)_{p\geq 1}$ est une suite d'éléments d'une partie bornée, donc admet une sous-suite convergente $(x_{\sigma(p)}, t_{\sigma(p)})_{p\geq 1}$ vers $(x^*,t^*) \in \Gamma_R$, l'égalité précédente s'écrit enore sous la forme

$$F(x_{\sigma(p)}, t_{\sigma(p)}) + \frac{x_{\sigma(p)}^2}{\sigma(p)} = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t) + \frac{R^2}{\sigma(p)}.$$

et quand p tend vers l'infini on obtient l'égalité :

$$F(x^*,t^*) = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t).$$

3.5 D'après ce précède et par application du résultat de la question [3.4] à F et $-F$, il existe deux couples (x_1^*,t_1^*) et (x_2^*,t_2^*) de Γ_R tels que :

$$0 = F(x_1^*,t_1^*) = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t).$$

$$0 = F(x_2^*,t_2^*) = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} (-F)(x,t) = -\inf_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t).$$

Donc la fonction F est identiquement nulle sur $\overline{\Omega}_R$.

3.6 D'après la deuxième partie, f est solution du problème (1), donc la fonction $G = f_1 - f$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

sur Ω_R, et par la question [3.5], la fonction G est nulle sur $\overline{\Omega}_R$, donc $f_1 = f$. D'où l'unicité de la solution du problème (1).

•••••••••••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr